

İdealize Edilmiş Fiziksel Sistemlerde Merdiven Dinamiği: Matematiksel Modelleme ve Gerçeklik Arasındaki Uyuşmazlıkların Analizi

Murat İzıkavas

Özet

Bu çalışma, klasik mekaniğin "kaygan merdiven problemi" çerçevesinde sürtünmesiz zemine ve duvara dayalı ince bir çubuğun hareketini analitik ve sayısal olarak incelemektedir. Uzunluğu 8 m olan çubuk, duvarla 15°'lik başlangıç açısıyla yerleştirilmiş ve sıfır başlangıç hızıyla serbest bırakılmıştır. Enerji korunumu ve ayrılma koşulundan türetilen $\cos \theta^* = (2/3) \cos \theta_0$ formülü teorik ayrılma açısını $\approx 49,9^\circ$ olarak vermiş; aynı varsayımlarla yapılan benzetimde çubuk 49°'de duvardan ayrılmıştır. Aradaki 0,9°'lik fark, her iki yöntemin fiziksel sistemi eşdeğer doğrulukla modellediğini ve sapmanın nümerik integral adımından kaynaklandığını göstermektedir. Çalışma, matematik modelin ideal koşullardaki iç tutarlılığını sayısal-analitik örtüşmeyle doğrulamış; bu modelin gerçek dünyada hangi koşullarda geçerli kaldığının ise bir sonraki adım olduğunu ortaya koymuştur.

Giriş

Lise fizik müfredatında doğrudan yer almayan merdiven problemi, analiz edildiğinde öğrencilerin yalnızca mekanik ilkeleri değil, matematiksel model ile fiziksel gerçeklik arasındaki ince sınırı da kavramalarını sağlayan geliştirici bir düşünce deneyine dönüşür; çünkü matematik ideal model içinde sonucu üretirken fizik, o modelin gerçek dünyada ne zamana kadar geçerli kalacağını belirler (Merdiven Problemi — Matematik ve Fizik Arasında Bir Okuma, n.d.). Sürtünmesiz bir sistemde merdivenin duvara dayalı olduğu bu idealize edilmiş kurgu, hareketin kısıtlar altında sürekliliğini matematiksel olarak ifade etse de, gerçek bir cismin temas noktalarındaki etkileşimlerini ihmal ederek modelin fiziksel sınırlarını zorlar. Örneğin, matematiksel hesaplamalar dikey konumdaki merdivenin üst ucunun düşey süratinin sıfıra yaklaşırken sonsuza ıraksadığını gösterse de, bu sonuç yalnızca fiziksel gerçeklikle bağdaşmayan idealize edilmiş bir varsayımın ürünüdür. Aslında bu sonsuzluk, fiziksel yüzeylerin birbirini çekemeyeceği gerçeğiyle çelişerek üst ucun duvardan kopacağı kritik noktayı işaret eder. Bu durum, modelin iç tutarlılığını sağlayan matematiksel formüllerin ötesine geçerek, maddenin rijitlik sınırları — cismin dış kuvvetler altında şekil değiştirmemesi varsayımı — ve sinyal iletim hızı gibi fiziksel kısıtların, sistemin dinamiklerini gerçek dünyada nasıl sınırlandığını ortaya koymaktadır.

Özellikle bir fiziksel etkileşimin cisim içinde yayılma hızı olan sinyal iletimi, mekanik bir etkinin merdiven boyunca anlık gerçekleşmediğini göstererek, matematiksel modelin "anlık" tepki varsayımının gerçek fiziksel süreçlerle olan uyumsuzluğunu somutlaştırmaktadır. Böylece matematik, değişkenler arasındaki mantıksal ilişkiyi kurarak modelin iç tutarlılığını sağlarken, fiziksel analiz bu modelin doğa yasaları karşısında ne zamana kadar geçerli kalacağını denetleyerek kuramsal çıkarımların sınırlarını belirler. Dolayısıyla, sürtünmenin tamamen ihmal edildiği bu modelde sistemin sadece geometrik kısıtlara indirgenmesi, merdivenin duvarla temasını koruduğu sürece geçerli olan bir soyutlamadır. Merdiven üst ucunun duvardan ayrıldığı noktadaki kritik açının ötesine geçildiğinde, sistemin denklemleri fiziksel bir gerçekliği değil, modelin geçerlilik sınırının aşıldığını temsil etmektedir.

Bu nedenle, öğrencinin matematiksel çözümün ötesine geçerek ivmelenme verilerini fiziksel bir "kopma" olgusu olarak yorumlaması, müfredatın temel amaçlarından biri olan doğa olaylarını analitik çerçevede modelleme yetisini güçlendirir. Bu bağlamda öğrenciler, sürtünmesiz ortam varsayımının sağladığı matematiksel sadeliğin, gerçek dünyadaki karmaşık enerji kayıplarını göz ardı eden geçici bir basitleştirme olduğunu analiz ederek eleştirel düşünme becerilerini geliştirirler. Sonuç olarak, öğrencilerin bu tür problemleri kavrayışı, sadece kâğıt üzerindeki denklemleri çözmekten öteye geçerek, fiziksel bir modelin hata paylarını ve uygulandığı bağlamın kısıtlarını sezgisel olarak tartabilme yeteneğine evrilir. Böylece mekanik problemleri birer "saf matematik" egzersizinden ziyade, doğanın kurallarını gözeten dinamik sistem analizleri olarak değerlendirme pratiği kazanırlar.

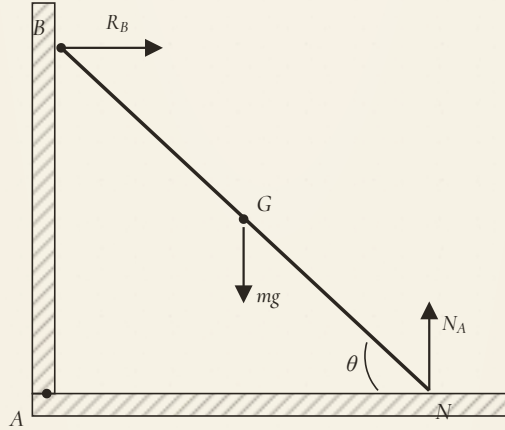
Bu durum, modelin iç tutarlılığını sağlayan matematiksel formüllerin ötesine geçerek, maddenin rijitlik sınırları ve sinyal iletim hızı gibi fiziksel kısıtların, sistemin dinamiklerini gerçek dünyada nasıl sınırlandırdığını ortaya koymaktadır. Dolayısıyla sürtünmenin tamamen ihmal edildiği bu modelde sistemin sadece geometrik kısıtlara indirgenmesi, merdivenin duvarla temasını koruduğu sürece geçerli olan bir soyutlamadır. Üst ucun duvardan ayrıldığı kritik açının ötesinde ise sistem artık kısıt denklemleriyle değil, serbest cisim dinamiğiyle tanımlanır. Bu nedenle problem, yalnızca bir matematik egzersizi değil, modelin geçerlilik sınırlarını sorgulatan öğretici bir fizik örneğidir.

Literatür Taraması

Merdivenin bir duvara yaslanıp yere doğru kayması, fizik ve matematik derslerinde çok eskiden beri incelenen klasik bir problemidir. Sorunu ilk olarak ele alan araştırmacılar, merdivenin kaymadan durabildiği en dik açıyı bulmaya çalıştılar; bunu yaparken merdivenin hem yere hem de duvara temas noktasında sürtünme olduğunu kabul ettiler.

Bazı araştırmacılar, duvardaki sürtünme kuvvetinin o noktadaki en büyük değere ulaştığını varsayarak merdivenin dengesini koruyan ek bir koşul öne sürdüler (Mendelson, 1995). Ancak bu yaklaşımlar yalnızca merdivenin durmaya başladığı anı tarif eder; merdiven gerçekten kaymaya başladıktan sonra neler olduğunu anlatmaz. Bu nedenle birçok araştırmacı, merdivenin kayıp duvardan ne zaman ayrıldığını konu alan dinamik çalışmalara yöneldi (Oliveira et al., 2015; Glane & Müller, 2019). Kopuş anını arayan araştırmacılar, merdiveni yere ve duvara temas eden, kütlesi ve

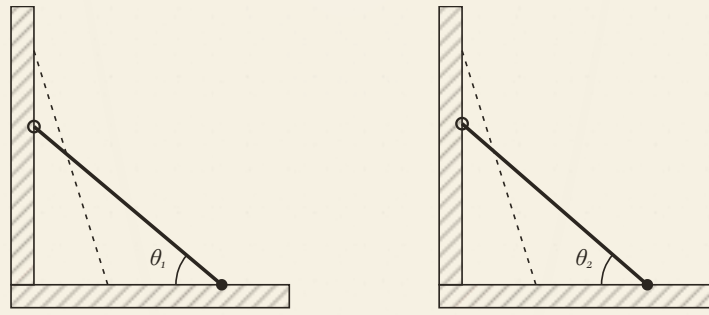
uzunluğu sabit bir çubuk gibi ele aldılar; bu modelde hareket boyunca yere olan temas korunur (Oliveira et al., 2015). Daha sonra yapılan çalışmalar, duvardan ayrılma anını problemin en kritik noktası olarak değerlendirip merdivenin hangi koşullarda bu temastan kopacağını konum ve hızın birlikte çizildiği faz uzayı grafiğinde inceledi (Glane & Müller, 2019). Bu çözümlerde merdiven, üzerinde basamaklar olmayan düz bir çubuk gibi ele alınır; ayrıca genellikle duvarın sürtünmesiz olduğu varsayılır. Bununla birlikte bu modeller, gerçek bir merdivenin esnekliğini, basamak varlığını ve ara parçalarını yok sayar; matematiksel çubuk ile fiziksel merdiven arasındaki uyumsuzluk büyük ölçüde açık kalır. Bu alışma, yukarıdaki matematiksel modellerin varsayımlarını gerçek bir merdivenin gözlemlenen hareketiyle karşılaştırarak model ile gerçeklik arasındaki farkların nereden kaynaklandığını ortaya koymayı hedeflemektedir.



şekil 1. Merdiven probleminin idealize edilmiş geometrik modeli.

Yöntem

Bu çalışmada gerçek hayat koşullarındaki gibi yerleştirilen, uzunluğu 8 m, kalınlığı 0,2 m ve kütlesi 1,6 kg olan ince bir çubuk, tüm yüzeylerdeki sürtünmenin (yer ve duvar) ihmal edildiği sayısal benzetim ortamında konumlandırılıp duvarla 15° açı yapacak biçimde sıfır başlangıç hızıyla başlatıldı. Benzetim süresince çubuğun alt ucu (2,071; 0) m, st ucu (0; 7,727) m ve kütle merkezi (1,035; 3,864) m başlangıç konumlarından hareketin her anında zamanla değişen konumları kaydedildi; bu verilerden her adımda duvarla çubuk arasındaki θ açısı yeniden hesaplandı. Benzetimden elde edilen ayrılma açısı değerı, Oliveira ve diğerlerinin (Oliveira et al., 2015) ve Glane ile Müller'in (Glane & Müller, 2019) kurduğu, aynı sürtünmesiz varsayımlara dayalı katı çubuk modelinin analitik grsyle karşılaştırıldı; bu karşılaştırmada kullanılan teorik ayrılma açısı, enerji korunumu ve ayrılma koşulundan türetilen $\cos \theta^* = (2/3) \cos \theta_0$ bağıntısıyla $\theta_0 = 15^\circ$ için $\approx 49,9^\circ$ olarak hesaplandı.

Teorik ayrılma açısı = $49,9^\circ$ Benzetim sonucu açısı = 49° 

Şekil 2. Çubuk aşağı kayarken tabandaki ayrılma açısının teorik ve benzetim sonuçlarıyla karşılaştırılması (kesikli çizgi: başlangıç konumu).

Bulgular

Benzetimde çubuğun duvardan ayrılma anı, duvarla yaptığı açının 49° 'ye ulaştığı konum olarak belirlendi.

Bu benzetimde zemin ve duvar sürtünmesi tıpkı teorik modeldeki gibi sıfır alındığından, elde edilen 49° 'lik sayısal sonuç ile $\cos \theta^* = (2/3) \cos \theta_0$ analitik formülünün (Oliveira et al., 2015; Glane & Müller, 2019) verdiği $\approx 49,9^\circ$ arasındaki $0,9^\circ$ 'lik fark büyük ölçüde integral adımı ve yuvarlama gibi nümerik çözüm hatalarından kaynaklanmaktadır.

Bu denli yakın örtüşme, katı çubuk ve sürtünmesiz yüzey varsayımları altında analitik modelin sayısal yoldan bağımsız olarak doğrulandığını göstermektedir (Oliveira et al., 2015; Glane & Müller, 2019).

Bu doğrulamadan sonra asıl soru, gerçek koşulların — sıfır olmayan sürtünme, çubuğun katı olmayışı ve ara parçaların varlığının — ayrılma açısını ne ölçüde değiştireceği ve model ile gerçeklik arasındaki asıl uyuşmazlığın nereden kaynaklanacağıdır.

Tartışma

Benzetim ve analitik modelin 49° ve $49,9^\circ$ örtüşmesi, sürtünmesiz ve katı çubuk varsayımları altındaki dinamik denklem sisteminin kendi içinde tutarlı olduğunu göstermektedir (Oliveira et al., 2015; Glane & Müller, 2019). Aynı varsayımları paylaşan bu iki çözüm yöntemi birbirini doğrulamaktadır; ancak sıfır sürtünme ve kusursuz rijitlik, gerçek bir ahşap merdivende hiçbir zaman tam olarak sağlanmaz (Glane & Müller, 2019). Bu nedenle yer sürtünmesinin sıfır olmaması, çubuğun esnekliği ve merdiven basamaklarının eklediği kütle dağılımı, ayrılma açısının $49,9^\circ$ 'den farklı bir değere kaymasına yol açacaktır.

Sonuç

Bu çalışma, sürtünmesiz benzetim koşullarında katı çubuk modelinin kendi içinde tutarlı olduğunu sayısal ve analitik örtüşmeyle doğrulamış, bir sonraki adımda gerçek sürtünme ve esneklik etkilerinin eklenmesi gerektiğini ortaya koymuştur.

Kaynakça

- Glane, S., & Müller, W. H. (2019). The sliding ladder problem revisited in phase space. *American Journal of Physics*, 87(6), 444–448. <https://doi.org/10.1119/1.5096278>
- Mendelson, K. S. (1995). Statics of a ladder leaning against a rough wall. *American Journal of Physics*, 63(2), 148–150. <https://doi.org/10.1119/1.17972>
- Merdiven problemi — matematik ve fizik arasında bir okuma. (n.d.).
- Oliveira, J. B., Carvalho, P. S., Mota, M. F., & Quintas, M. J. M. P. (2015). Dynamics of a sliding ladder leaning against a wall. *Physics Education*, 50(3), 329–334. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/50/3/329>